ис-55476уч К-583
кафедра Прикл. Мат.
91
№ 2
559
427
84

Communications de la Société mathématique de Kharkow.
2-e série, Tome I, № 1.

СООБЩЕНІЯ
ХАРЬКОВСКАГО
МАТЕМАТИЧЕСКАГО ОБЩЕСТВА.

ВТОРАЯ СЕРІЯ

Томъ I.

№ 1.

1888

ХАРЬКОВЪ.
Типографія М. Ф. Зильберберга, Рыбная ул., д. № 25-й.
1888.

92
58 2009

СОДЕРЖАНІЕ

I-го тома.

Составъ Харьковскаго Математическаго Общества . . . . I—II

Элементарный выводъ закона большихъ чиселъ теоріи вѣроятностей; *В. Г. Имшенецкаго* . . . . 1—6

О постоянныхъ винтовыхъ движеніяхъ твердаго тѣла въ жидкости; *А. М. Ляпунова* . . . . 7—60

Объ алгебраическомъ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ; *И. Л. Пташицкаго* . . . . 61—73

Объ одной теоремѣ относительно алгебраическихъ интеграловъ; *его-же* . . . . 74—77

Объ интерполированіи двухъ произведеній; *И. И. Иванова* 78—81

Объ одномъ преобразованіи гиперэллиптическихъ интеграловъ; *К. А. Торопова* . . . . 82—103

Линейныя дифференціальныя уравненія съ частными производными перваго порядка; *В. П. Ермакова* . . . . 104—112

Къ вопросу о черченіи картъ; *А. А. Маркова*. . . . . . 113—128

Одна задача механики системы матеріальныхъ точекъ; *Д. К. Бобылева* . . . . 129—138

О преломленіи свѣтовыхъ лучей въ срединахъ, ограниченныхъ какими-нибудь поверхностями; *А. П. Грузинцева* . . . 139—168

О функціяхъ подобныхъ функціи гамма; *В. П. Алексѣевскаго* 169—238

Объ интерполированіи нѣкоторыхъ произведеній; *В. А. Стеклова* . . . . 239—248

Задача на преобразованіе фигуръ въ пространствѣ; *В. П. Ермакова* 249

Нѣсколько примѣровъ рѣшенія особаго рода задачъ о наибольшихъ и наименьшихъ величинахъ; *А. А. Маркова* (съ таблицею рисунковъ) . . . . 250—276

Семиугольники Шрётера; *К. А. Андреева* . . . . 277—280

Извлеченіе изъ протоколовъ засѣданій . . . . 281—284

Объ алгебраическомъ интегрированіи алгебраическихъ дифференціаловъ.

И. Л. Пташицкаго.

1. Настоящая статья посвящается слѣдующему вопросу:

„*Пусть функція y связана съ перемѣнною x алгебраическимъ уравненіемъ; требуется выразить интегралъ $\int ydx$ черезъ алгебраическую функцію отъ x или доказать, что значеніе предложеннаго интеграла не можетъ быть представлено алгебраическою функціею*".

Этотъ вопросъ въ первый разъ вполнѣ рѣшилъ *Ліувиль* (Journal de l'Ecole polytechnique, XXII cahier; Journal de mathématiques, t. III). Онъ основывался въ своемъ рѣшеніи на слѣдующей теоремѣ *Абеля:* если интегралъ $\int ydx$ выражается алгебраически, то величина его можетъ быть представлена функціею, составленною раціонально изъ x и y.

Вопросомъ объ алгебраическомъ интегрированіи занимались еще и другіе математики. Я укажу на *Briot et Bouquet* (Théorie des fonctions elliptiques), гг. *Zeuthen* (Comptes rendus, 1880), *Raffy* (Annales de l'Ecole Normale, 1883, 1885), *Humbert* (Acta mathematica, 1887).

Не входя въ подробное разсмотрѣніе предложенныхъ до настоящаго времени рѣшеній занимающаго насъ вопроса, я замѣчу только, что всѣ они сводятъ вопросъ на отысканіе нѣсколькихъ полиномовъ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ.

Въ настоящей статьѣ я желаю указать на одну теорему, которая позволяетъ рѣшить вопросъ инымъ путемъ. Эта же теорема даетъ возможность рѣшить вопросъ и съ помощью способа неопредѣленныхъ коэффиціентовъ, на основаніи новыхъ соображеній.

2. Теорема. *Пусть P есть цѣлая функція отъ x; z — функція, опредѣляемая неприводимымъ уравненіемъ съ цѣлыми коэффиціентами*

$$z^n + \varphi_1(x)\, z^{n-1} + \varphi_2(x)\, z^{n-2} + \ldots = 0\,;$$

z_1, z_2, ... z_n всѣ значенія, принимаемыя функціею z для каждаго значенія x. Пусть Δ есть дискриминантъ уравненія съ z и

$$\Delta = D^2 . E\,,$$

гдѣ D, E суть цѣлые полиномы относительно x, причемъ полиномъ E не содержитъ линейныхъ кратныхъ множителей.

Если интегралъ

$$\int \frac{z}{P}\, dx$$

выражается алгебраически, то можно положить

$$\int \frac{z}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y}\,,$$

гдѣ Y, X_0, X_1, ... X_{n-1} суть цѣлыя функціи отъ x, опредѣленныя слѣдующимъ образомъ:

1⁰ Полиномъ Y равенъ произведенію изъ полинома D на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ

$$P, \quad \frac{dP}{dx}.$$

2⁰ Полиномы X_0, X_1, ... X_{n-1} удовлетворяютъ равенствамъ:

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1\,, & z_1\,, & z_1^{\,2}, & \ldots z_1^{\,i-1}, & \int \frac{z_1}{P}\, dx\,, & z_1^{\,i+1}, & \ldots z_1^{\,n-1} \\ 1\,, & z_2\,, & z_2^{\,2}, & \ldots z_2^{\,i-1}, & \int \frac{z_2}{P}\, dx\,, & z_2^{\,i+1}, & \ldots z_2^{\,n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1\,, & z_n\,, & z_n^{\,2}, & \ldots z_n^{\,i-1}, & \int \frac{z_n}{P}\, dx\,, & z_n^{\,i+1}, & \ldots z_n^{\,n-1} \end{vmatrix},$$

гдѣ $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

3. Доказательство первой части нашей теоремы основывается главнымъ образомъ на одномъ предложенiи, къ выводу котораго мы предварительно и обратимся.

Возьмемъ n выраженiй

$$X_0+X_1z_1+X_2z_1^2+\ldots+X_{n-1}z_1^{n-1},$$

$$X_0+X_1z_2+X_2z_2^2+\ldots+X_{n-1}z_2^{n-1},$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$X_0+X_1z_n+X_2z_n^2+\ldots+X_{n-1}z_n^{n-1},$$

въ которыхъ X_0, $X_1,\ldots X_{n-1}$ означаютъ цѣлыя функцiи отъ x; z_1 $z_2,\ldots z_n$ — значенiя функцiи z, опредѣленной въ предыдущемъ n^0.

Пусть $x-a$ представляетъ двучленъ, не дѣлящiй всѣхъ полиномовъ X_0, $X_1,\ldots X_{n-1}$, и содержащiйся во всѣхъ n нашихъ выраженiяхъ съ показателями больше нуля [1]). Пусть α есть наименьшiй изъ этихъ показателей.

Займемся разсмотрѣнiемъ двучлена $x-a$ и показателя α.

Мы сказали, что не всѣ полиномы X_0, $X_1,\ldots X_{n-1}$ дѣлятся на $x-a$; положимъ X_k есть полиномъ взаимно простой съ $x-a$. Называя разсматриваемыя нами выраженiя соотвѣтственно черезъ

$$\mathfrak{Z}_1,\ \mathfrak{Z}_2,\ldots\mathfrak{Z}_n,$$

мы имѣемъ равенство

$$X_k=\frac{1}{\sqrt{\triangle}}\begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2,\ldots z_1^{k-1}, & \mathfrak{Z}_1, & z_1^{k+1},\ldots z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2,\ldots z_2^{k-1}, & \mathfrak{Z}_2, & z_2^{k+1},\ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\ 1, & z_n, & z_n^2,\ldots z_n^{k-1}, & \mathfrak{Z}_n, & z_n^{k+1},\ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

въ которомъ $\triangle$ есть цѣлая функцiя отъ x, равная дискриминанту уравненiя съ z. Легко видѣть, что опредѣлитель, входящiй въ полученное равенство, содержитъ $x-a$ съ показателемъ не меньше α.

Отсюда, въ силу вышепредположеннаго относительно X_k, сейчасъ получаемъ предложенiе, которое имѣли въ виду вывести: двучленъ

[1]) Мы будемъ говорить, что функцiя содержитъ множитель $(x-a)$ съ показателемъ μ, если въ разложенiи функцiи, по восходящимъ степенямъ двучлена $x-a$, первый членъ содержитъ $(x-a)^{\mu}$. Число μ можетъ быть цѣлымъ или дробнымъ, положительнымъ или отрицательнымъ.

$x-a$ дѣлитъ дискриминантъ Δ и притомъ показатель α не превосходитъ показателя, съ которымъ $x-a$ содержится въ радикалѣ $\sqrt{\Delta}$.

4. Основываясь на выведенномъ нами предложенiи, не трудно теперь убѣдиться въ справедливости первой части нашей теоремы ($n^0 2$).

Пусть

$$\int \frac{z}{P}\, dx$$

есть интегралъ, выражающiйся алгебраически.

На основанiи теоремы Абеля, цитированной въ $n^0 1$, будемъ имѣть равенство

$$\int \frac{z}{P}\, dx = \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y},$$

въ которомъ Y, X_0, $X_1, \ldots X_{n-1}$ означаютъ цѣлыя функцiи отъ x, которыя, очевидно, можемъ предполагать взаимно простыми. Замѣтимъ, что это равенство, какъ показалъ Абель, остается справедливымъ, если на мѣсто z подставить какое угодно изъ n значенiй: z_1, $z_2, \ldots z_n$.

Предложимъ себѣ теперь изслѣдовать, какiе простые множители могутъ входить въ полиномъ Y, и въ какихъ степеняхъ.

Назовемъ черезъ $x-a$ одинъ изъ простыхъ множителей полинома Y и черезъ

$$\delta, \alpha, p$$

показатели, съ которыми двучленъ $x-a$ содержится соотвѣтственно въ функцiяхъ

$$Y, \quad X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}, \quad P.$$

Между этими показателями, какъ легко убѣдиться, существуетъ весьма простая зависимость.

Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая вышенаписанное равенство, мы видимъ, что производная первой части содержитъ $x-a$ съ показателемъ не меньше $-p$, производная второй части содержитъ этотъ множитель, если только δ не равно α, съ показателемъ равнымъ $\alpha-\delta-1$; такъ что, если δ не равно α, то навѣрное

$$-p \leqq \alpha - \delta - 1.$$

Слѣдовательно, δ — показатель множителя $(x-a)$ у полинома Y опредѣляется одною изъ формулъ

$$\delta=\alpha\,, \quad \delta \leqq \alpha+p-1\,.$$

Предположимъ теперь, и это по вышезамѣченному всегда возможно, что въ нашемъ равенствѣ z означаетъ то изъ n значенiй $z_1, z_2, \ldots z_n$, при которомъ показатель α имѣетъ наименьшую величину. Если, при этомъ предположенiи, число α не равно нулю, то ($n^0 3$) навѣрно $x-a$ будетъ дѣлителемъ дискриминанта Δ и само α не будетъ превосходить показателя, съ которымъ этотъ двучленъ содержится въ радикалѣ $\sqrt{\Delta}$.

Въ силу этого изъ полученныхъ нами формулъ для δ сейчасъ можемъ заключить, что всѣ простые множители полинома Y найдутся между простыми множителями полиномовъ

$$P\,, \Delta\,.$$

Затѣмъ, изъ тѣхъ же формулъ для δ легко опредѣлить показатели, съ которыми простые множители полиномовъ $P\,, \Delta$ войдутъ въ полиномъ Y.

Разсмотримъ сначала двучленъ $x-a$, недѣлящiй полинома P. Изъ нашихъ формулъ, полагая $p=0$, заключаемъ, что показатель δ, съ которымъ $x-a$ входитъ въ полиномъ Y, не превзойдетъ числа α, а потому не превзойдетъ и показателя, съ которымъ этотъ двучленъ содержится въ радикалѣ $\sqrt{\Delta}$. Но у насъ $\sqrt{\Delta}=D\sqrt{E}$, гдѣ радикалъ $\sqrt{E}$ не имѣетъ рацiональныхъ множителей; число же δ, очевидно, должно быть цѣлымъ. Слѣдовательно, въ разбираемомъ случаѣ $(x-a)^\delta$ будетъ дѣлить полиномъ D.

Возьмемъ, во вторыхъ, двучленъ $x-a$, дѣлящiй полиномъ P. Изъ формулъ для δ заключаемъ, что показатель δ у множителя $(x-a)$ въ полиномѣ Y не больше числа $\alpha+p-1$. Здѣсь p означаетъ кратность множителя $(x-a)$ въ полиномѣ P, а потому $p-1$ есть кратность того же множителя у общаго наибольшаго дѣлителя полинома P и производной $\frac{dP}{dx}$; число α не больше показателя, съ которымъ $x-a$ входитъ въ радикалъ $\sqrt{\Delta}=D\sqrt{E}$. Слѣдовательно, въ разбираемомъ случаѣ $(x-a)^\delta$ будетъ дѣлить произведенiе изъ полинома D на общiй наибольшiй дѣлитель полиномовъ $P, \frac{dP}{dx}$.

И такъ, первая часть теоремы доказана.

5. Изъ равенства предыдущаго n^0 получаемъ n уравненiй:

$$\int \frac{z_1}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z_1 + X_2 z_1^2 + \ldots + X_{n-1} z_1^{n-1}}{Y},$$

$$\int \frac{z_2}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z_2 + X_2 z_2^2 + \ldots + X_{n-1} z_1^{n-1}}{Y},$$

. . . .

$$\int \frac{z_n}{P} dx = \frac{X_0 + X_1 z_n + X_2 z_n^2 + \ldots + X_{n-1} z_n^{n-1}}{Y}.$$

Рѣшая эти уравненія относительно $X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$, получаемъ формулы, составляющія вторую часть доказываемой теоремы.

6. Изъ теоремы $n^0 2$ непосредственно вытекаетъ слѣдующій способъ для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи даннаго алгебраическаго дифференціала ydx.

Приводимъ функцію y къ виду

$$\frac{z}{P}$$

и дискриминантъ уравненія съ z къ виду

$$\triangle = D^2 . E.$$

Составляемъ произведеніе изъ полинома D на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ P, $\frac{dP}{dx}$; это произведеніе даетъ намъ полиномъ Y.

Затѣмъ, разлагаемъ въ ряды, по нисходящимъ степенямъ x, n выраженій

$$\frac{Y}{\sqrt{\triangle}} \begin{vmatrix} 1, z_1, z_1^2, \ldots z_1^{i-1}, \int \frac{z_1}{P} dx, z_1^{i+1}, \ldots z_1^{n-1} \\ 1, z_2, z_2^2, \ldots z_2^{i-1}, \int \frac{z_2}{P} dx, z_2^{i+1}, \ldots z_2^{n-1} \\ \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \\ 1, z_n, z_n^2, \ldots z_n^{i-1}, \int \frac{z_n}{P} dx, z_n^{i+1}, \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots n - 1),$$

въ которыхъ $z_1, z_2, \ldots z_n$ означаютъ всѣ корни уравненія съ z и

$$\sqrt{\Delta} = \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2, & \ldots z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2, & \ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & z_n^2, & \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Цѣлыя части разложеній дадутъ соотвѣтственно полиномы

$$X_0, \; X_1, \ldots X_{n-1}.$$

Коэффиціенты этихъ полиномовъ будутъ содержать, вообще, линейнымъ образомъ n неизвѣстныхъ постоянныхъ $c_1, c_2, \ldots c_n$; c_i есть постоянная произвольная интеграла $\int \frac{z_i}{P} dx$.

Одну изъ постоянныхъ можно назначить произвольно; остальныя опредѣляемъ изъ условія, что равенство

$$\frac{d}{dx}\left[\int \frac{z}{P} dx - \frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y}\right] = 0$$

должно обращаться въ тожество.

Когда постоянныя $c_1, c_2, \ldots c_n$ будутъ опредѣлены, тогда функція

$$\frac{X_0 + X_1 z + X_2 z^2 + \ldots + X_{n-1} z^{n-1}}{Y}$$

представитъ величину предложеннаго интеграла

$$\int \frac{z}{P} dx.$$

Если же постоянныя $c_1, \ldots c_n$, не могутъ быть опредѣлены согласно нашему условію, тогда заключимъ, что предложенный интегралъ не выражается алгебраически.

Замѣчаніе. Иногда невозможность алгебраическаго интегрированія можемъ обнаружить, не доводя до конца нашихъ дѣйствій. Мы заключимъ, что интегралъ $\int \frac{z}{P} dx$ не выражается алгебраически: 1^0 если разложеніе одной изъ функцій $\frac{z_i}{P}$ будетъ содержать членъ съ x^{-1} (такъ

*

какъ тогда разложеніе интеграла $\int \frac{z_i}{P} dx$ будетъ содержать членъ съ $\log x$ и, слѣдовательно, этотъ интегралъ не равняется алгебраической функціи); 2^0 если въ разложеніи выраженія, которое должно дать одинъ изъ полиномовъ X_i, члены съ дробными положительными степенями x не могутъ быть уничтожены ни при какомъ выборѣ постоянныхъ $c_1, c_2, \dots c_n$ [1]).

7. Вторая часть теоремы $n^0 2$ позволяетъ опредѣлить полиномы X^0 $X_1, \dots X_{n-1}$ еще слѣдующимъ образомъ.

Пользуясь формулами второй части теоремы, вычисляемъ высшіе предѣлы степеней полиномовъ $X_0, X_1, \dots X_{n-1}$; затѣмъ опредѣляемъ коэффиціенты этихъ полиномовъ по способу неопредѣленныхъ коэффиціентовъ изъ условія, чтобы равенство предыдущаго n^0 обратилось въ тожество.

Замѣчаніе. Легко убѣдиться, что, слѣдуя этому второму пути при отысканіи полиномовъ X_i, для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи дифференціала ydx придется выполнять только ариѳметическія дѣйствія.

8. Примѣнимъ наши правила къ тремъ примѣрамъ; два первые заимствованы у Бріо и Буке.

Примѣръ I. Разсмотримъ интегралъ

$$\int z dx,$$

гдѣ z удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^3 - 3z + 2x = 0.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\triangle = 108 - 108x^2,$$

такъ что

$$D = 1.$$

Находимъ

$$Y = 1.$$

[1]) Способъ, данный въ этомъ n^0, былъ уже мною предложенъ для одного частнаго случая въ Прибавленіи къ разсужденію *„Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ ирраціональныхъ дифференціаловъ“* (Спб., 1881).

Переходимъ къ опредѣленію полиномовъ X_0, X_1, X_2. Для этого отыщемъ цѣлыя части въ разложеніяхъ, по нисходящимъ степенямъ x, трехъ выраженій

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} \int z_1dx, & z_1, & z_1^2 \\ \int z_2dx, & z_2, & z_2^2 \\ \int z_3dx, & z_3, & z_3^2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & \int z_1dx, & z_1^2 \\ 1, & \int z_2dx, & z_2^2 \\ 1, & \int z_3dx, & z_3^2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix} 1, & z_1, & \int z_1dx \\ 1, & z_2, & \int z_2dx \\ 1, & z_3, & \int z_3dx \end{vmatrix}.$$

Съ помощью уравненія съ z находимъ

$$z_1 = \alpha_1 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_1} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_1 x^{-\frac{5}{3}} + \ldots,$$

$$z_2 = \alpha_2 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_2} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_2 x^{-\frac{5}{3}} + \ldots,$$

$$z_3 = \alpha_3 x^{\frac{1}{3}} + \frac{1}{\alpha_3} x^{-\frac{1}{3}} + \beta_3 x^{-\frac{5}{3}} + \ldots;$$

гдѣ α_1, α_2, α_3 суть значенія корня $\sqrt[3]{-2}$; величина коэффиціентовъ β_1, β_2, β_3 намъ не нужна; отсюда сейчасъ получимъ

$$z_1^2 = \alpha_1^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_1^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_1\beta_1 x^{-\frac{4}{3}} + \ldots,$$

$$z_2^2 = \alpha_2^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_2^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_2\beta_2 x^{-\frac{4}{3}} + \ldots,$$

$$z_3^2 = \alpha_3^2 x^{\frac{2}{3}} + 2 + \frac{1}{\alpha_3^2} x^{-\frac{2}{3}} + 2\alpha_3\beta_3 x^{-\frac{4}{3}} + \ldots;$$

и

$$\int z_1dx = \frac{3\alpha_1}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_1} x^{\frac{2}{3}} + c_1 - \frac{3\beta_1}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \ldots,$$

$$\int z_2dx = \frac{3\alpha_2}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_2} x^{\frac{2}{3}} + c_2 - \frac{3\beta_2}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \ldots,$$

$$\int z_3dx = \frac{3\alpha_3}{4} x^{\frac{4}{3}} + \frac{3}{2\alpha_3} x^{\frac{2}{3}} + c_3 - \frac{3\beta_3}{2} x^{-\frac{2}{3}} + \ldots,$$

гдѣ c_1, c_2, c_3 постоянныя интегрированія. Еще находимъ

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}}=\frac{1}{\sqrt{-108}}\left(x^{-1}+\frac{1}{2}x^{-3}+\ldots\right).$$

Пользуясь выписанными разложеніями, получимъ

$$X_0 = \text{пост.},\quad X_1=\frac{3}{4}x,\quad X_2=-\frac{3}{8}.$$

И такъ, если предложенный интегралъ выражается алгебраически, то можно положить

$$\int zdx=\frac{3}{4}xz-\frac{3}{8}z^2.$$

Взявъ производную обѣихъ частей этого равенства, убѣждаемся, что оно дѣйствительно представляетъ величину предложеннаго интеграла.

Примѣръ II. Разсмотримъ интегралъ

$$\int zdx,$$

гдѣ z удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^3-3xz+x^3=0.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\Delta=-27x^6+108x^3,$$

такъ что

$$D=x.$$

Находимъ

$$Y=x.$$

Переходимъ теперь къ отысканію полиномовъ X_0, X_1, X_2, пользуясь правиломъ n^07. Для этого ищемъ сначала высшіе предѣлы степеней этихъ полиномовъ, или, что одно и тоже, выраженій

$$\frac{x}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix}\int z_1dx\,, & z_1\,, & z_1{}^2\\ \int z_2dx\,, & z_2\,, & z_2{}^2\\ \int z_3dx\,, & z_3\,, & z_3{}^2\end{vmatrix}, \quad \frac{x}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix}1\,, & \int z_1dx\,, & z_1{}^2\\ 1\,, & \int z_2dx\,, & z_2{}^2\\ 1\,, & \int z_3dx\,, & z_3{}^2\end{vmatrix}, \quad \frac{x}{\sqrt{\Delta}}\begin{vmatrix}1\,, & z_1\,, & \int z_1dx\\ 1\,, & z_2\,, & \int z_2dx\\ 1\,, & z_3\,, & \int z_3dx\end{vmatrix}.$$

Изъ уравненія съ z видимъ, что $z_1\,,\ z_2\,,\ z_3$ суть первой степени; отсюда заключаемъ, что $z_1{}^2\,,\ z_2{}^2\,,\ z_3{}^2$ и $\int z_1dx\,,\ \int z_2dx\,,\ \int z_3dx$ суть степени второй; замѣтимъ еще что $\dfrac{x}{\sqrt{\Delta}}$ есть (-2)-ой степени.

Слѣдовательно, высшіе предѣлы степеней выписанныхъ выраженій представятся соотвѣтственно числами

$$3\,,\ 2\,,\ 1\,.$$

Приступаемъ къ опредѣленію коэффиціентовъ полиномовъ $X_0,\, X_1,\, X_2$. Равенство

$$\frac{d}{dx}\left[\int zdx - \frac{X_0+X_1z+X_2z^2}{x}\right]=0\,,$$

послѣ подстановки въ немъ на мѣсто производной $\dfrac{dz}{dx}$ ея значенія, выраженнаго чрезъ x и z, послѣ уничтоженія дробей и исключенія степеней z выше второй, представитъ соотношеніе между x и z, второй степени относительно z. Изъ него сейчасъ заключаемъ уравненія

$$x\frac{dX_0}{dx}-X_0+x^3\frac{dX_1}{dx}-x^4=0\,,$$

$$2x\frac{dX_1}{dx}-X_1-x^3\frac{dX_2}{dx}-x^2X_2-2x^2=0\,,$$

$$x\frac{dX_0}{dx}-X_0+2x^2\frac{dX_2}{dx}=0\,,$$

которымъ должны удовлетворять искомые полиномы. Зная высшіе предѣлы степеней этихъ полиномовъ можемъ, по способу неопредѣленныхъ коэффицентовъ, опредѣлить и коэффиценты этихъ полиномовъ. Не безполезно еще замѣтить, что, если полиномъ X_1 не выше второй степени, то, какъ непосредственно видно изъ полученныхъ дифференціаль-

ныхъ уравненій, полиномъ X_2 будетъ не выше нулевой степени, полиномъ X_0 не выше первой степени.

Такимъ образомъ, отысканіе полиномовъ X_0, X_1, X_2 не представитъ никакой трудности; мы находимъ

$$X_0 = bx, \quad X_1 = \frac{1}{2}x^2, \quad X_2 = -\frac{1}{2},$$

гдѣ b произвольная постоянная.

И такъ, значеніе предложеннаго интеграла опредѣляется формулою

$$\int z dx = \frac{\frac{1}{2}x^2 z - \frac{1}{2}z^2}{x}.$$

Примѣръ III. Разсмотримъ интегралъ

$$\int \frac{z}{x}\, dx,$$

гдѣ z удовлетворяетъ неприводимому уравненію

$$z^2 - 2x^3 z + x^6 - x^4 - 1 = 0.$$

Дискриминантъ этого уравненія есть

$$\triangle = 4x^4 + 4,$$

такъ что

$$D = 1.$$

Такъ какъ въ разсматриваемомъ примѣрѣ

$$P = x,$$

то находимъ

$$Y = 1.$$

Переходимъ къ отысканію полиномовъ X_0, X_1. Ищемъ цѣлыя части въ разложеніяхъ выраженій

$$\frac{1}{\sqrt{\triangle}} \begin{vmatrix} \int \frac{z_1}{x}\, dx, & z_1 \\ \int \frac{z_2}{x}\, dx, & z_2 \end{vmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{\triangle}} \begin{vmatrix} 1, & \int \frac{z_1}{x}\, dx \\ 1, & \int \frac{z_2}{x}\, dx \end{vmatrix}.$$

Изъ уравненія съ z получимъ

$$z_1 = x^3 + x^2 + \frac{1}{2}x^{-2} - \frac{1}{8}x^{-6} + \ldots,$$

$$z_2 = x^3 - x^2 - \frac{1}{2}x^{-2} + \frac{1}{8}x^{-6} + \ldots;$$

отсюда находимъ

$$\int \frac{z_1}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + c_1 - \frac{1}{4}x^{-2} + \frac{1}{48}x^{-6} + \ldots,$$

$$\int \frac{z_2}{x}\,dx = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + c_2 + \frac{1}{4}x^{-2} - \frac{1}{48}x^{-6} + \ldots,$$

гдѣ c_1, c_2, постоянныя интегрированія; еще замѣтимъ, что

$$\frac{1}{\sqrt{\Delta}} = \frac{-1}{2}\left(x^{-2} - \frac{1}{2}x^{-6} + \ldots\right).$$

Пользуясь выписанными разложеніями, получимъ

$$X_0 = \frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 + c_2}{2}, \qquad X_1 = \frac{1}{2}.$$

И такъ, если предложенный интегралъ выражается алгебраически, то можно положить

$$\int \frac{z}{x}\,dx - \left(\frac{-1}{6}x^3 - \frac{c_1 - c_2}{2}x + \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{1}{2}z\right) = 0$$

Но постоянныя c_1, c_2, не могутъ быть опредѣлены изъ условія, чтобы производная первой части послѣдняго равенства тождественно обращалась въ нуль. Слѣдовательно, нашъ интегралъ не выражается алгебраически.

Объ одной теоремѣ относительно алгебраическихъ интеграловъ.

И. Л. Пташицкаго.

1. Въ настоящей замѣткѣ я желаю дать другое болѣе простое доказательство теоремы, которая въ предыдущей статьѣ послужила основаніемъ двухъ методовъ для рѣшенія вопроса объ алгебраическомъ интегрированіи даннаго алгебраическаго дифференціала ydx [1]).

2. Теорема. *Пусть P есть цѣлая функція отъ x; z — функція, опредѣляемая неприводимымъ уравненіемъ съ цѣлыми коэффиціентами*

$$z^n + \varphi_1(x)z^{n-1} + \varphi_2(x)z^{n-2} + \ldots = 0\,,$$

Пусть z_1, z_2, .. z_n представляютъ всѣ значенія, принимаемыя функціею z для каждаго значенія x и $\triangle$ дискриминантъ уравненія съ z. Пусть наконецъ

$$\triangle = D^2.E\,,$$

гдѣ D, E цѣлые полиномы относительно x; полиномъ E не содержитъ линейныхъ кратныхъ множителей.

Если интегралъ

$$\int\frac{z}{P}\,dx$$

выражается алгебраическою функціею, то можно положить

$$\int\frac{z}{P}\,dx = \frac{X_0 + X_1z + X_2z^2 + \ldots + X_{n-1}z^{n-1}}{Y}\,,$$

---

[1]) Первому доказательству посвящены *nn*⁰ 3 — 5 предыдущей статьи.

гдѣ $Y, X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$ *суть цѣлыя функціи отъ* x, *опредѣляемыя слѣдующимъ образомъ:*

1^0 Y *равенъ произведенію изъ полинома*

$$D$$

на общій наибольшій дѣлитель полиномовъ

$$P, \quad \frac{dP}{dx};$$

2^0 $X_0, X_1, \ldots X_{n-1}$ *удовлетворяютъ равенствамъ:*

$$X_i = \frac{Y}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1^2, \ldots z_1^{i-1}, & \int \frac{z_1}{P}\, dx, & z_1^{i+1}, \ldots z_1^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2^2, \ldots z_2^{i-1}, & \int \frac{z_2}{P}\, dx, & z_2^{i+1}, \ldots z_2^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot \quad \cdot \\ 1, & z_n, & z_n^2, \ldots z_n^{i-1}, & \int \frac{z_n}{P}\, dx, & z_n^{i+1}, \ldots z_n^{n-1} \end{vmatrix},$$

гдѣ $i = 0, 1, 2, \ldots n-1$.

3. Доказательство. Пусть интегралъ

$$\int \frac{z}{P}\, dx$$

выражается алгебраически. Тогда должно существовать равенство

$$\int \frac{z}{P}\, dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z + \frac{X_2}{Y_2} z^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z^{n-1}, \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

въ которомъ $X_0, Y_0, X_1, Y_1, \ldots$ означаютъ цѣлыя функціи отъ x. Можно предположить, что дробь $\frac{X_i}{Y_i}$ несократима.

Равенство (1) влечетъ за собою n уравненій

$$\int \frac{z_1}{P}\,dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_1 + \frac{X_2}{Y_2} z_1{}^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_1{}^{n-1},$$

$$\int \frac{z_2}{P}\,dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_2 + \frac{X_2}{Y_2} z_2{}^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_2{}^{n-1},$$

. . . .

$$\int \frac{z_n}{P}\,dx = \frac{X_0}{Y_0} + \frac{X_1}{Y_1} z_n + \frac{X_2}{Y_2} z_n{}^2 + \ldots + \frac{X_{n-1}}{Y_{n-1}} z_n{}^{n-1}.$$

Замѣтимъ, пользуясь этими уравненіями, что интегралъ

$$\int \frac{z_k}{P}\,dx, \quad (k = 1,\ 2,\ 3, \ldots n), \quad . \ . \ . \ . \ . \ (2)$$

вблизи каждой точки a можетъ быть представленъ съ помощью ряда, расположеннаго по возрастающимъ степенямъ $x - a$; такой рядъ будетъ содержать только конечное число членовъ съ отрицательными показателями.

Рѣшая систему нашихъ уравненій относительно коэффиціентовъ $\frac{X_0}{Y_0}$, $\frac{X_1}{Y_1}$, . . ., получаемъ формулу:

$$\frac{X_i}{Y_i} = \frac{1}{\sqrt{\Delta}} \begin{vmatrix} 1, & z_1, & z_1{}^2, \ldots z_1{}^{i-1}, & \int \frac{z_1}{P}\,dx, & z_1{}^{i+1}, \ldots z_1{}^{n-1} \\ 1, & z_2, & z_2{}^2, \ldots z_2{}^{i-1}, & \int \frac{z_2}{P}\,dx, & z_2{}^{i+1}, \ldots z_2{}^{n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1, & z_n, & z_n{}^2, \ldots z_n{}^{i-1}, & \int \frac{z_n}{P}\,dx, & z_n{}^{i+1}, \ldots z_n{}^{n-1} \end{vmatrix}, \quad . \ . \ (3)$$

$$(i = 0,\ 1,\ 2, \ldots n-1).$$

Представимъ эту формулу подъ другимъ видомъ.

Съ этою цѣлью замѣтимъ, что всѣ элементы опредѣлителя, входящаго въ формулу (3), за исключеніемъ элементовъ i-аго столбца, остаются конечными при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ x. Что же касается элемента (2) i-аго столбца, то очевидно, что онъ можетъ обращаться въ безконечность только при значеніяхъ x равныхъ корнямъ полинома P. Пусть

$$P=(x-a_1)^{\alpha_1}(x-a_2)^{\alpha_2}\dots(x-a_l)^{\alpha_l}.$$

Легко видѣть, что при $x=a$ интегралъ (2) или будетъ оставаться конечнымъ, или будетъ обращаться въ безконечность порядка не выше, какъ дробь $\dfrac{1}{(x-a)^{\alpha-1}}$.

Слѣдовательно, разсматриваемый нами опредѣлитель приводится къ

$$\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}},$$

гдѣ $f(x)$ представляетъ функцію, остающуюся конечною при всѣхъ конечныхъ значеніяхъ x. Припомнимъ еще, что радикалъ $\sqrt{\triangle}$ входящій въ формулу (3), равенъ $D.\sqrt{E}$, гдѣ полиномъ E не содержитъ линейныхъ кратныхъ множителей.

Отсюда заключаемъ, что формула (3) даетъ

$$\frac{X_i}{Y_i}=\frac{f(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}.D\sqrt{E}}.$$

Изъ этого равенства, припомнивъ свойства функцій $f(x)$, E, X_i, Y_i, видимъ, что полиномъ Y_i долженъ дѣлить полиномъ

$$Y=D.(x-a_1)^{\alpha_1-1}(x-a_2)^{\alpha_2-1}\dots(x-a_l)^{\alpha_l-1}.$$

Итакъ въ равенствѣ (1) можемъ считать, что

$$Y_i=Y,\quad (i=0,\ 1,\ 2,\dots n-1);$$

это предложеніе и составляетъ первую часть доказываемой теоремы.

Подставляя затѣмъ вышенайденное значеніе полинома Y_i въ формулу (3), мы получимъ изъ нея выраженіе для полинома X_i, которое и докажетъ вторую часть нашей теоремы.

Объ интерполированіи двухъ произведеній.

И. И. Иванова.

Если черезъ

$$\prod_{ax+b}$$

обозначимъ произведеніе

$$(a+b)(2a+b)(3a+b)\dots(xa+b),$$

а черезъ

$$\prod_{ax^2+b}$$

произведеніе

$$(1^2a+b)(2^2a+b)(3^2a+b)\dots(x^2a+b),$$

то, при условіи $0 < b < a$, имѣютъ мѣсто слѣдующія неравенства:

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi} a^x x^{x+\frac{1}{2}+\frac{b}{a}} e^{-x+\frac{b}{a}C-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi} a^x x^{x+\frac{1}{2}} (x+1)^{\frac{b}{a}} e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}C}$$

и

$$\prod_{ax^2+b} > 2\pi a^x x^{2x+1} e^{-2x+\frac{b}{a}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{3(x+1)(x+2)(x+3)}\right)}$$

$$\prod_{ax^2+b} < 2\pi a^x x^{2x+1} e^{-2x+\frac{1}{6x}+\frac{b}{a}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

Въ двухъ первыхъ неравенствахъ C обозначаетъ постоянную Эйлера:

$$C = 0{,}5772156\ldots$$

Докажемъ два первыя неравенства. Очевидно, что

$$\prod_{xa+b} = a^x.1.2\ldots x.\left(1+\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{2a}\right)\left(1+\frac{b}{3a}\right)\ldots\left(1+\frac{b}{ax}\right).$$

Изъ разложенія $lg\left(1+\frac{b}{ka}\right)$ въ рядъ:

$$lg\left(1+\frac{b}{ka}\right) = \frac{b}{ka} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{ka}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{b}{ka}\right)^3 - \ldots,$$

при условіи

$$0 < b < a,$$

находимъ:

$$1+\frac{b}{ka} < e^{\frac{b}{ka}} \qquad \text{и} \qquad 1+\frac{b}{ka} > e^{\frac{b}{ka}-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{k^2}},$$

слѣдовательно,

$$\prod_{ax+b} > a^x.1.2.3\ldots x.e^{\frac{b}{a}\sum_1^x \frac{1}{k} - \frac{1}{2}\left(\frac{b}{a}\right)^2 \sum_1^x \frac{1}{k^2}}$$

и

$$\prod_{ax+b} < a^x.1.2.3\ldots x.e^{\frac{b}{a}\sum_1^x \frac{1}{k}}.$$

Если C обозначаетъ постоянную Эйлера, то, какъ извѣстно,

$$C = \left(\frac{1}{1} - lg\,\frac{2}{1}\right) + \left(\frac{1}{2} - lg\,\frac{3}{2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x} - lg\,\frac{x+1}{x}\right) + \ldots$$

и такъ какъ

$$\frac{1}{m} - lg\frac{m+1}{m} > 0$$

и $$lg\frac{m+1}{m} - \frac{1}{m+1} > 0, \quad \text{при } m > 1,$$

то имѣемъ

$$\sum_1^x \frac{1}{k} > C + lg\, x,$$

$$\sum_1^x \frac{1}{k} < C + lg\,(x+1).$$

Далѣе, извѣстно, что

$$\sum_1^\infty \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

и такъ какъ, очевидно,

$$\sum_k^\infty \frac{1}{(k+1)^2} > \sum_k^\infty \frac{1}{(k+1)(k+2)} = \frac{1}{k+1},$$

то находимъ, что

$$\sum_1^x \frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1}$$

принимяя во вниманіе выведенныя неравенства, а также два извѣстныя неравенства:

$$1.2.3\ldots x > \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x}$$

и $$1.2.3\ldots x < \sqrt{2\pi}\, x^{x+\frac{1}{2}} e^{-x+\frac{1}{12x}},$$

мы и находимъ требуемыя:

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi}\,a^{x}\,a^{x+\frac{1}{2}}\,e^{-x+\frac{b}{a}(C+lgx)-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

или

$$\prod_{ax+b} > \sqrt{2\pi}\,a^{x}\,x^{x+\frac{b}{a}+\frac{1}{2}}\,e^{-x+\frac{b}{a}C-\frac{1}{2}\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}\right)}$$

и

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi}\,a^{x}\,x^{x+\frac{1}{2}}\,e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}(C+lg\,(x+1))}$$

или

$$\prod_{ax+b} < \sqrt{2\pi}\,x^{x}\,x^{x+\frac{1}{2}}\,(x+1)^{\frac{b}{a}}\,e^{-x+\frac{1}{12x}+\frac{b}{a}C}$$

Послѣдніе два вышепредложенныя неравенства доказываются точно такъ же. При доказательствѣ ихъ придется принять во вниманіе, кромѣ двухъ неравенствъ Стирлинга, еще слѣдующія два:

$$\sum_{1}^{x}\frac{1}{k^2} > \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x},$$

$$\sum_{1}^{x}\frac{1}{k^2} < \frac{\pi^2}{6}-\frac{1}{x+1}$$

и

$$\sum_{1}^{x}\frac{1}{k^4} < \frac{\pi^4}{90}-\frac{1}{3}\,\frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)},$$

которыя доказываются очень легко и изъ которыхъ второе было уже выше доказано.

С.-Петербургъ.
20 Марта 1888 г.

Объ одномъ преобразованіи гиперэллиптическихъ интеграловъ.

К. А. Торопова.

Въ настоящей замѣткѣ я намѣренъ разсмотрѣть преобразованіе гиперэллиптическихъ интеграловъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

[$R(x)$ цѣлый полиномъ x, f есть знакъ раціональной функціи] посредствомъ введенія въ нихъ новой перемѣнной y уравненіемъ

$$y = U(x),$$

гдѣ $U(x)$ цѣлый полиномъ x.

Изслѣдованіе этого преобразованія даетъ возможность составить безчисленное множество гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

I.

Положимъ, что, вводя въ интегралъ

$$\int \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

вмѣсто x новую перемѣнную y уравненіемъ

$$y = U(x),$$

мы получаемъ интегралъ

$$\int \frac{f_1(y)\,dy}{\sqrt{R_1(y)}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(2)$$

Пусть

$$R_1(y) = (y - \alpha_1)(y - \alpha_2)\ldots(y - \alpha_m),$$

гдѣ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$ различны между собою; тогда, по введеніи въ интегралъ (2) x, будемъ имѣть

$$\int \frac{f_1(U)\,U'dx}{\sqrt{(U-\alpha_1)(U-\alpha_2)\ldots(U-\alpha_m)}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(3)$$

Полиномы $U-\alpha_1,\ U-\alpha_2, \ldots, U-\alpha_m$ можно представить въ такомъ видѣ:

$$\left.\begin{array}{l} U-\alpha_1 = p_1{}^2\gamma_1\,, \\ U-\alpha_2 = p_2{}^2\gamma_2\,, \\ .\;.\;.\;.\;.\;. \\ U-\alpha_m = p_m{}^2\gamma_m\,, \end{array}\right\} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(a)$$

гдѣ полиномы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ не имѣютъ кратныхъ множителей; они не имѣютъ также общихъ множителей, на основаніи сдѣланнаго предположенія о постоянныхъ $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_m$, ибо разность

$$p_i{}^2\gamma_i - p_k{}^2\gamma_k = \alpha_k - \alpha_i$$

не можетъ имѣть этого множителя.

Интегралъ (3) представится въ такомъ видѣ:

$$\int \frac{f_1(U)\,U'dx}{p_1 p_2 \ldots p_m \sqrt{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}}\,.$$

Полиномы $p_1, p_2, \ldots p_m$, какъ видно изъ равенствъ (a), суть дѣлители производной U' и потому функція

$$\frac{U'}{p_1 p_2 \ldots p_m} = \varrho$$

есть цѣлый полиномъ x.

*

Сравнивая полученный интегралъ съ (1), мы должны положить:

$$\left.\begin{aligned} \varrho f_1(U) = f(x) \\ \gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m = R(x) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (b)$$

Возьмемъ изъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_m$ какіе-нибудь i полиномовъ, напримѣръ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_i$, и положимъ:

$$\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i = R_i(x);$$

тогда въ интегралѣ

$$\int\frac{\lambda dx}{\sqrt{R_i(x)}}$$

раціональную функцію λ можно подобрать на безчисленное множество манеръ такъ, чтобы этотъ интегралъ приводился къ интегралу низшаго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, помножая числителя и знаменателя подъ интеграломъ на произведеніе $p_1\, p_2\ldots p_i$, получимъ интегралъ

$$\int\frac{\lambda p_1\, p_2\ldots p_i dx}{\sqrt{(U-\alpha_1)(U-\alpha_2)\ldots(U-\alpha_i)}}.$$

Полагая

$$\lambda = \frac{U'}{p_1 p_2\ldots p_i} f(U), \quad U = y,$$

гдѣ f знакъ произвольной раціональной функціи, будемъ имѣть интегралъ

$$\int\frac{f(y)\, dy}{\sqrt{(y-\alpha_1)(y-\alpha_2)\ldots(y-\alpha_i)}},$$

гдѣ подъ знакомъ корня есть полиномъ степени i, меньшей, вообще, чѣмъ степень полинома $\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i$.

Очевидно, если $i=2$, то получается интегралъ, выражающійся въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Отсюда слѣдуетъ такая теорема: если гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{f(x)dx}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}}$$

приводится къ интегралу низшаго класса (посредствомъ указаннаго преобразованія), то интегралъ

$$\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{\gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_i}} \quad (i < m)$$

также приводится къ интегралу низшаго класса; а интегралъ

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{\gamma_k \gamma_e}} \quad (k < m,\ e < m) \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

выражается въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Не трудно найти выраженіе интеграла (4) въ логариѳмахъ, когда ϱ есть цѣлый полиномъ (случай, разсмотрѣнный еще Абелемъ).

Въ самомъ дѣлѣ, интегралъ (4) равенъ

$$\int \frac{\varrho\, p_k p_e\, dx}{\sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}};$$

положивъ

$$\varrho = \frac{U'}{p_k p_e},$$

найдемъ

$$\int \frac{U' dx}{\sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}},$$

выраженіе котораго чрезъ логариѳмы таково:

$$\frac{1}{2} \lg \frac{U - \frac{\alpha_k + \alpha_e}{2} + \sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}}{U - \frac{\alpha_k + \alpha_e}{2} - \sqrt{(U-\alpha_k)(U-\alpha_e)}} =$$

$$= \frac{1}{2} \lg \frac{p_k{}^2 \gamma_k + p_e{}^2 \gamma_e + 2 p_k p_e \sqrt{\gamma_k \gamma_e}}{p_k{}^2 \gamma_k + p_e{}^2 \gamma_e - 2 p_k p_e \sqrt{\gamma_k \gamma_k}} = \lg \frac{p_k \sqrt{\gamma_k} + p_e \sqrt{\gamma_e}}{p_k \sqrt{\gamma_k} - p_e \sqrt{\gamma_e}}.$$

Слѣдовательно,

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{\gamma_k \gamma_e}} = \lg \frac{p_k \sqrt{\gamma_k} + p_e \sqrt{\gamma_e}}{p_k \sqrt{\gamma_k} - p_e \sqrt{\gamma_c}}.$$

Такъ какъ степени полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ всѣ одинаковой четности, то въ интегралѣ, выражающемся въ логариѳмахъ, мы имѣемъ подъ знакомъ корня полиномъ четной степени.

Разсмотримъ сказанное на примѣрѣ.

Данъ гиперэллиптическій интегралъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ

$$R(x)=(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)(x^2+4).$$

Введемъ въ этомъ интегралъ новую перемѣнную y уравненіемъ

$$y = x^4 + 12x^3 + 40x^2 + 48x + 1.$$

Если будемъ дѣлить многочленъ $x^4+12x^3+40x^2+48x+1$ послѣдовательно на $x^2+10x+19$, x^2+8x+4, x^2+4, то увидимъ, что остатки отъ этихъ дѣленій не зависятъ отъ x и въ частныхъ получаются полные квадраты. Отсюда, на основаніи вышеизложеннаго, заключаемъ, что данный гиперэллиптическій интегралъ приводится къ интегралу низшаго класса.

Въ самомъ дѣлѣ, легко видѣть, что

$$y+18=(x+1)^2(x^2+10x+19),$$

$$y+15=(x+2)^2(x^2+8x+4),$$

$$y+143=(x+6)^2(x^2+4).$$

Слѣдовательно, помножая подъ интеграломъ числителя и знаменателя на $(x+1)$ $(x+2)$ $(x+6)$, получимъ эллиптическій интегралъ

$$\frac{1}{4}\int \frac{dy}{\sqrt{y(y+18)(y+15)(y+143)}}.$$

Вмѣстѣ съ этимъ заключаемъ, что интегралы:

$$\int \frac{(x+6)\,dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)}},$$

$$\int \frac{(x+1)\,dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+8x+4)(x^2+4)}},$$

$$\int \frac{(x+2)\,dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+10x+19)(x^2+4)}}$$

тою же подстановкою приводятся соотвѣтственно къ эллиптическимъ:

$$\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y+18)(y+15)}},$$

$$\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y+15)(y+143)}},\qquad \frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{y(y+18)(y+143)}}.$$

Точно также гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)(x^2+4)}}$$

приводится къ эллиптическому

$$\frac{1}{4}\int\frac{dy}{\sqrt{(y+18)(y+15)(y+143)}}.$$

Кромѣ того, мы имѣемъ выраженія въ логариѳмахъ слѣдующихъ интеграловъ:

$$\int\frac{4(x^2+8x+12)dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+10x+19)}}=$$

$$=\lg\frac{p_1\sqrt{\gamma_1}+p_2\sqrt{\gamma_2}}{p_1\sqrt{\gamma_1}-p_2\sqrt{\gamma_2}}$$

$$\int\frac{4(x^2+7x+6)\,dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+8x+4)}}=$$

$$=\lg\frac{p_1\sqrt{\gamma_1}+p_3\sqrt{\gamma_3}}{p_1\sqrt{\gamma_1}-p_3\sqrt{\gamma_3}}$$

$$\int\frac{4(x^2+3x+2)dx}{\sqrt{(x^4+12x^3+40x^2+48x+1)(x^2+4)}}=$$

$$=\lg\frac{p_1\sqrt{\gamma_1}+p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_1\sqrt{\gamma_1}-p_4\sqrt{\gamma_4}}$$

$$\int\frac{4(x+6)dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+8x+4)}}=$$

$$=\lg\frac{p_2\sqrt{\gamma_2}+p_3\sqrt{\gamma_3}}{p_2\sqrt{\gamma_2}-p_3\sqrt{\gamma_3}}$$

$$\int\frac{4(x+2)dx}{\sqrt{(x^2+10x+19)(x^2+4)}}=\lg\frac{p_2\sqrt{\gamma_2}+p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_2\sqrt{\gamma_2}-p_4\sqrt{\gamma_4}}$$

$$\int\frac{4(x+1)dx}{\sqrt{(x^2+8x+4)(x^2+4)}}=\lg\frac{p_3\sqrt{\gamma_3}+p_4\sqrt{\gamma_4}}{p_3\sqrt{\gamma_3}-p_4\sqrt{\gamma_4}}.$$

Здѣсь

$$p_1=1,\qquad \gamma_1=x^4+12x^3+40x^2+48x+1,$$

$$p_2=x+1,\qquad \gamma_2=x^2+10x+19,$$

$$p_3=x+2,\qquad \gamma_3=x^2+8x+4,$$

$$p_4=x+6,\qquad \gamma_4=x^2+4.$$

Подобныхъ примѣровъ можно составить, конечно, сколько угодно; для этого стоитъ только взять за y полиномъ

$$\int(x+a_1)^{2l_1-1}(x+a_2)^{2l_2-1}\ldots(x+a_q)^{2lq-1}dx+C.$$

Понятное дѣло, что въ указанномъ примѣрѣ, какъ и вообще, кромѣ перечисленныхъ интеграловъ, мы имѣемъ еще множество другихъ вида

$$\int\frac{ldx}{\sqrt{R_1(x)}},$$

[гдѣ $R_1(x)=R(x)(y-a_k)(y-a_{k+1})\ldots$] приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ; въ этихъ интегралахъ разностямъ

$$y-a_k=p_k^2\gamma_k,\quad y-a_{k+1}=p^2_{k+1}\gamma_{k+1},\ldots$$

соотвѣтствуютъ значенія для p_k, $p_{k+1}\ldots$ независящія отъ x. Такіе интегралы мы въ счетъ принимать не будемъ.

Изъ предыдущаго видимъ, что, если намъ удастся посредствомъ указаннаго преобразованія найти одинъ гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{ldx}{\sqrt{\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_m}},$$

приводящійся къ интегралу низшаго класса, то мы сейчасъ же найдемъ еще $\frac{m(m-1)}{1.2}$ интеграловъ, выражающихся въ логариѳмахъ и $2^m-\frac{m(m+1)}{1.2}-2$ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ; въ этомъ

послѣднемъ числѣ заключается $\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)}{1.2.3.4}$ интеграловъ, приводящихся къ эллиптическимъ. $\frac{(m+1)m(m-1)(m-2)(m-3)(m-4)}{1.2.3.4.5.6}$ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ перваго класса, и т. д. Эти числа выведены мною на основаніи извѣстныхъ свойствъ числа сочетаній изъ m элементовъ по n.

Въ приведенномъ выше примѣрѣ $m=4$ и потому мы нашли, кромѣ даннаго, еще 6 интеграловъ, выражающихся въ логариѳмахъ и 4 интеграла, приводящихся къ эллиптическимъ.

II.

Для составленія гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ, можно пользоваться также слѣдующимъ пріемомъ.

Возьмемъ интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}},$$

(гдѣ ϱ и R цѣлые полиномы x) выражающійся въ логариѳмахъ. Такихъ интеграловъ мы знаемъ сколько угодно.

Въ этомъ случаѣ, какъ извѣстно, существуютъ два полинома P и Q, удовлетворяющіе равенству

$$P^2-Q^2R=C=\text{пост.}$$

Полиномы P и Q найдутся посредствомъ разложенія $\sqrt{R}$ въ непрерывную дробь, именно $\frac{P}{Q}$ будетъ одна изъ подходящихъ дробей этого разложенія.

Положимъ

$$P=U,$$

тогда

$$Q^2R=U^2-C.$$

Помножая числителя и знаменателя подъ интеграломъ на Q, получимъ

$$\int\frac{\varrho Q dx}{\sqrt{[U^2-C]}}.$$

Положивъ здѣсь

$$\varrho = \frac{U'}{Q} = \frac{P'}{Q},$$

найдемъ

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}} = \frac{1}{2} \lg \frac{P + Q\sqrt{R}}{P - Q\sqrt{R}}.$$

Такъ какъ степень P на m единицъ выше степени полинома Q (если R есть $2m$-ой степени), то, очевидно, $\varrho = \frac{P'}{Q}$ будетъ $(m - 1)$-ой степени.

Замѣтимъ, что интегралъ

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R}}$$

выражается въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ и въ томъ случаѣ, когда

$$f(x) = \frac{P'}{Q} F(P),$$

гдѣ F знакъ произвольной раціональной функціи, а P и Q вышеупомянутые полиномы; иначе говоря, *если мы имѣемъ $\sqrt{R}$, разлагающійся въ непрерывную дробь, то вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ безчисленное множество интеграловъ вида*

$$\int \frac{f(x)dx}{\sqrt{R}},$$

выражающихся въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функціяхъ.

Не трудно доказать также слѣдующую теорему.

Теорема. Если интегралъ

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{R}},$$

гдѣ ϱ и R цѣлые полиномы, выражается въ логариѳмахъ, то гиперэллиптическій интегралъ перваго вида

$$\int \frac{\varrho dx}{\sqrt{P . R}},$$

гдѣ P полиномъ, удовлетворяющій равенству

$$P^2 - Q^2R = \text{пост.},$$

приводится къ эллиптическому.

Для доказательства замѣчаемъ, что по предыдущему $\varrho = \frac{P'}{Q}$ и, слѣдовательно,

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{P\cdot R}} = \int\frac{P' dx}{Q\sqrt{R\,.\,P}} = \int\frac{P' dx}{\sqrt{P(P^2 - C)}}.$$

Полагая

$$P = y,$$

получимъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{P\,.\,R}} = \frac{dy}{\sqrt{y(y^2 - C)}},$$

что и требовалось доказать.

Кромѣ этого гиперэллиптическаго интеграла можно найти еще нѣсколько другихъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ нѣсколько постоянныхъ C_1, $C_2 \ldots C_n$ и разложимъ разности $P - C_1$, $P - C_2, \ldots$ на множители; можемъ написать:

$$U - C_1 = p_1{}^2\gamma_1,$$
$$U - C_2 = p_2{}^2\gamma_2,$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$U - C_n = p_n{}^2\gamma_n.$$

Тогда интегралъ

$$\int\frac{\lambda dx}{\sqrt{R\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}}$$

приводится къ интегралу низшаго класса положеніемъ

$$\lambda = \frac{U'}{Qp_1p_2\ldots p_n} = \frac{P'}{Qp_1p_2\ldots p_n}$$

и

$$U = y,$$

и вмѣстѣ съ нимъ, по вышеизложенному, приводится къ интегралу низшаго класса и какой угодно изъ интеграловъ

$$\frac{\lambda dx}{\sqrt{R\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_i}} \quad (i < n).$$

Полиномы p_1, $p_2, \ldots p_n$, очевидно, должны быть, какъ и Q, дѣлителями полинома P'. Число ихъ, слѣдовательно, не превышаетъ $m-1$, если $2m$ есть степень полинома R. (Замѣтимъ опять, что здѣсь мы не принимаемъ въ расчетъ значенiй p_1, $p_2, \ldots$, не зависящихъ отъ x).

Изъ сказаннаго получаемъ слѣдующiй прiемъ для составленiя гиперэллиптическихъ интеграловъ, приводящихся къ интеграламъ низшихъ классовъ.

Беремъ какой-нибудь интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R}}$$

(ϱ и R цѣлые полиномы), выражающiйся въ логариѳмахъ.

Извѣстнымъ способомъ найдемъ полиномы P и Q, удовлетворяющiе равенству

$$P^2-Q^2R=C.$$

Производный полиномъ P' дѣлимъ на Q и частное представляемъ въ видѣ произведенiя $p_1p_2\ldots p_n$. Затѣмъ дѣлимъ P послѣдовательно на $p_1{}^2$, $p_2{}^2, \ldots p_n{}^2$. Частныя будутъ γ_1, $\gamma_2, \ldots \gamma_n$ и остатки $C_1, C_2, \ldots C_n$. (Эти остатки, необходимо, будутъ величины, независящiя отъ x).

Тогда интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{R\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_n}}$$

приведется къ интегралу низшаго класса, а вмѣстѣ съ нимъ приведется къ интеграламъ низшихъ классовъ извѣстное число другихъ интеграловъ и, кромѣ того, найдется нѣсколько интеграловъ, выражающихся въ логариѳмахъ.

Прослѣдимъ сказанное сейчасъ на примѣрѣ.

Возьмемъ интегралъ

$$\int\frac{\varrho dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}.$$

Этотъ интегралъ выражается въ логариѳмахъ, такъ какъ

$$\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}=$$
$$=x^2+ax+b+\cfrac{1}{\cfrac{x+a}{-2ab}+\cfrac{1}{-2a(x+a)+\cfrac{1}{\cfrac{x^2+ax+b}{2a^2b}+\dots}}}$$

Находимъ полиномы P и Q:

$$\frac{P}{Q}=x^2+ax+b+\cfrac{1}{\cfrac{x+a}{-2ab}+\cfrac{1}{-2a(x+a)}}=$$
$$=\frac{(x^2+ax+b)([x+a]^2+b)-2ab(x+a)}{(x+a)^2+b}.$$

Слѣдовательно, имѣемъ

$$P=(x^2+ax+b)([x+a]^2+b)-2ab(x+a),$$
$$Q=(x+a)^2+b,$$

и

$$P^2-Q^2R=-4a^2b^3.$$

По раздѣленіи P' на Q у насъ получится частное первой степени: $4x+a$.

Такимъ образомъ, прежде всего имѣемъ

$$\int\frac{(4x+a)\,dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}=\frac{1}{2}\lg\frac{P+Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}{P-Q\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}}$$

и интегралъ

$$\int\frac{(4x+a)\,dx}{\sqrt{[(x^2+ax+b)^2-4abx]\,[(x^2+ax+b)((x+a)^2+b)-2ab(x+a)]}}=$$
$$=\int\frac{dy}{\sqrt{y(y^2+4a^2b^3)}},$$

гдѣ $y=(x^2+ax+b)((x+a)^2+b)-2ab(x+a)$.

Полагаемъ $p_1=x+\frac{a}{4}$ и дѣлимъ p на $\left(x+\frac{a}{4}\right)^2$, найдемъ частное

$$\gamma_1 = x^2 + \frac{5ax}{2} + 2b + \frac{27a^2}{16}$$

и остатокъ

$$C_1 = b^2 - \frac{9a^2b}{8} - \frac{27a^4}{256}.$$

На основанiи вышеизложеннаго получаемъ слѣдующiя выраженiя интеграловъ:

$$\int\frac{dx}{\sqrt{P\gamma_1}} = 4\int\frac{dy}{\sqrt{(y^2+4a^2b^3)\left(y-b^2+\frac{9}{8}a^2b+\frac{27}{256}a^4\right)}},$$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{PR\gamma_1}} = 4\int\frac{dy}{\sqrt{y(y^2+4a^2b^3)\left(y-b^2+\frac{9}{8}a^2b+\frac{27}{256}a^4\right)}},$$

$$\int\frac{(x^2+2ax+a^2+b)}{\sqrt{P\gamma_1}}dx = \lg\frac{\sqrt{P}+p_1\sqrt{\gamma_1}}{\sqrt{P}-p_1\sqrt{\gamma_1}}.$$

Кромѣ того, можно выразить въ логариѳмахъ и алгебраическихъ функцiяхъ интегралы:

$$\int\frac{(4x+a)\,f(P)dx}{\sqrt{(x^2+ax+b)^2-4abx}},$$

$$\int\frac{(x^2+2ax+a^2+b)\,f(P)dx}{\sqrt{P\gamma_1}},$$

гдѣ $f(P)$ произвольная рацiональная функцiя P.

Точно такъ же можемъ выразить въ эллиптическихъ интегралахъ и такiе гиперэллиптическiе:

$$\int\frac{f(P)dx}{\sqrt{R\gamma_1}},\quad \int\frac{f(P)dx}{\sqrt{PR\gamma_1}}.$$

Очевидно, такимъ образомъ, что и посредствомъ разсмотрѣннаго сейчасъ прiема можемъ найти сколько угодно гиперэллиптическихъ интеграловъ, выражающихся чрезъ эллиптическiе.

III.

Положимъ, намъ данъ интегралъ

$$\int\frac{l\,dx}{\sqrt{N(x)}},$$

гдѣ $N(x)$ цѣлый полиномъ x, и требуется узнать, не приводится ли онъ къ интегралу низшаго класса.

Въ нѣкоторыхъ случаяхъ вопросъ этотъ можетъ быть рѣшенъ въ положительномъ смыслѣ, на основаніи вышеизложеннаго.

Разлагаемъ подкоренной полиномъ $N(x)$ на множители

$$M_1 M_2 \ldots M_n,$$

при чемъ степени этихъ множителей должны быть одинаковой четности, и смотримъ, не получается ли при нѣкоторой комбинаціи полиномовъ $M_1 M_2, \ldots$, напр. $M_1 M_2 \ldots M_i$, въ разложеніи $\sqrt{M_1 M_2 \ldots M_i}$ непрерывная періодическая дробь (предполагается, что степень произведенія $M_1 M_2 \ldots M_i$ выше 2). Допустимъ, что получается. Ищемъ тогда полиномы P и Q, удовлетворяющіе равенству

$$P^2 - Q^2 M_1 M_2 \ldots M_i = C.$$

Дѣлимъ P' на Q и пусть частное будетъ $p_1 p_2 \ldots p_k$. Тогда, если данный интегралъ приводится къ болѣе простому посредствомъ нашего преобразованія, то въ частныхъ отъ дѣленія P на $p_1{}^2, p_2{}^2, \ldots$ должны получиться полиномы $M_{i+1}, M_{i+2}, \ldots M_n$ и въ остаткахъ величины, независящія отъ x.

Для приведенія даннаго интеграла къ интегралу низшаго класса слѣдуетъ ввести въ него новую перемѣнную y уравненіемъ

$$y = P.$$

Разсмотримъ это на гиперэллиптическомъ интегралѣ Эрмита [1])

$$\int \frac{l\,dx}{\sqrt{(x^2 - a)(4x^3 + 3ax + b)}}.$$

Для удобства замѣнимъ въ немъ a чрезъ a^2

$$\int \frac{l\,dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)(4x^3 + 3a^2 x + b)}}.$$

Представивъ подкоренной полиномъ въ видѣ произведенія

$$(x - a)(x + a)(4x^3 + 3a^2 x + b),$$

[1]) Sur un exemple de réduction des intégrales Abeliennes aux fonctions elliptiques. (Annales de la Société scientifique de Bruxelles, 1876).

пробуемъ разложить

$$\sqrt{(x+a)(4x^3+3a^2x+b)}$$

въ непрерывную дробь:

$$\sqrt{(x+a)(4x^3+3a^2x+b)}=\sqrt{(2x^2+ax-a^2)^2+(b-a^3)(x+a)}=$$
$$=2x^2+ax-a^2+\cfrac{1}{\cfrac{2(2x-a)}{b-a^3}+\cfrac{1}{2(2x^2+ax-a^2)+\cfrac{1}{\cfrac{2(2x-a)}{b-a^3}+\ldots}}}$$

Видимъ, что получается періодическая дробь. Опредѣляемъ полиномы P и Q

$$\frac{P}{Q}=2x^2+ax-a^2+\frac{b-a^3}{2(2x-a)}=\frac{8x^3-6a^2x+b+a^3}{2(2x-a)}.$$

Частное отъ дѣленія P' на Q есть $3(2x+a)=3p_1$. Дѣлимъ P на $(2x+a)^2$; получимъ частное, равное какъ разъ $2(x-a)$ и остатокъ $b+3a^3$.

Заключаемъ отсюда, что гиперэллиптическій интегралъ

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(4x^3-3a^2x+b)}}$$

приводится къ эллиптическому. Для нахожденія этого эллиптическаго интеграла слѣдуетъ числителя и знаменателя въ данномъ интегралѣ помножить на p_1Q и потомъ положить

$$y=8x^3-6a^2x+b+a^3.$$

Точно такъ же приводится къ эллиптическому такой интегралъ

$$\int\frac{f(P)dx}{\sqrt{(x^2-a^2)(4x^3-3a^2x+b)}},$$

гдѣ f есть знакъ произвольной раціональной функціи.

Выше мы предполагали, что степень произведенія $M_1M_2\ldots M_i$ выше двухъ. Случай, когда она равняется 2, особенно интересенъ, и мы разберемъ его отдѣльно въ слѣдующемъ n^0.

IV.

Пусть гиперэллиптическій интегралъ:

$$\int\frac{l\,dx}{\sqrt{R(x)}}$$

положеніемъ

$$y = U(x)$$

приводится къ интегралу нисшаго класса

$$\int\frac{l_1\,dy}{\sqrt{(y-a_1)(y-a_2)\ldots(y-a_k)}}.$$

Представимъ разности подкоренного полинома въ видѣ

$$U-a_1 = p_1{}^2\gamma_1,$$

$$U-a_2 = p_2{}^2\gamma_2,$$

$$\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot$$

$$U-a_k = p_k{}^2\gamma_k.$$

Степени полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ должны быть одинаковой четности, т. е. эти полиномы или всѣ нечетныхъ степеней, или всѣ четныхъ. Если $R(x)$ нечетной степени, то, необходимо, $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ будутъ нечетныхъ степеней, если же $R(x)$ четной степени, то $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ могутъ быть и четныхъ, и нечетныхъ степеней.

Если всѣ полиномы $\gamma_1, \gamma_2, \ldots \gamma_k$ нечетныхъ степеней, то первой степени могутъ быть только два изъ нихъ, напр. γ_1 и γ_2, не болѣе. Въ самомъ дѣлѣ, тогда степень $U(x)$ есть $2m+1$ (нечетная) и потому p_1 и p_2 оба будутъ степени m и, такъ какъ p_1 и p_2 суть дѣлители производной $U'(x)$, то остальные полиномы $p_3, p_4, \ldots p_k$ будутъ величины постоянныя, не зависящія отъ x, и, стало быть, $\gamma_3, \gamma_4, \ldots \gamma_k$ каждый будетъ степени $2m+1$.

Этотъ случай, когда два изъ полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \ldots \gamma_k$ первой степени, я и намѣренъ здѣсь разобрать. Въ этомъ случаѣ видъ полинома U опредѣляется вполнѣ, а потому опредѣляется и видъ $R(x)$.

Пусть

$$\gamma_1 = x + a\,,$$
$$\gamma_2 = x + b\,.$$

Такъ какъ p_1 и p_2 суть дѣлители полинома $U'(x)$, то заключаемъ

$$U'(x) = (2m+1)\,p_1 p_2\,.$$

Слѣдовательно,

$$\frac{U'}{\sqrt{(U-a_1)(U-a_2)}} = \frac{2m+1}{\sqrt{(x+a)(x+b)}}.$$

Интегрируя это дифференціальное уравненіе, получимъ

$$U - \frac{a_1+a_2}{2} + \sqrt{(U-a_1)(U-a_2)} =$$
$$= C\left[x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)}\right]^{2m+1}.$$

Постоянную C, вошедшую при интегрированіи, опредѣляемъ изъ условія, что при $x+a=0$ должно быть $U=a_1$. Это условіе даетъ намъ такое равенство

$$C = \frac{\frac{a_1-a_2}{2}}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}}.$$

Мѣняя знаки у радикаловъ, будетъ имѣть въ то же время

$$U - \frac{a_1+a_2}{2} - \sqrt{(U-a_1)(U-a_2)} =$$
$$= C\left(x + \frac{a+b}{2} - \sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}.$$

Складывая два полученныя равенства, найдемъ

$$2U - (a_1+a_2) = \frac{\frac{a_1-a_2}{2}}{\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}}\left\{\left(x + \frac{a+b}{2} + \sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1} + \right.$$
$$\left. + \left(x + \frac{a+b}{2} - \sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}\right\},$$

откуда

$$U(x)=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{\frac{a_1+a_2}{2}}{2\left(\frac{b-a}{2}\right)^{2m+1}}\left\{\left(x+\frac{a+b}{2}+\sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}+\right.$$

$$\left.+\left(x+\frac{a+b}{2}-\sqrt{(x+a)(x+b)}\right)^{2m+1}\right\}.$$

Зная, что

$$\cos n \arccos z=\frac{(z+\sqrt{z^2-1})^n+(z-\sqrt{z^2-1})^n}{2},$$

мы можемъ полиномъ U сокращенно написать такъ

$$U(x)=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1-a_2}{2}\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}.$$

Полиномы p_1 и p_2 будутъ

$$p_1=\cos m\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\cos(m-1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\ldots+\frac{1}{2},$$

$$p_2=\cos m\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}-\cos(m-1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\ldots+(-1)^m\frac{1}{2},$$

такъ что

$$U-a_1=4\,\frac{a_1-a_2}{b-a}(x+a)p_1{}^2,$$

$$U-a_2=4\,\frac{a_1-a_2}{b-a}(x+b)p_2{}^2.$$

Если бы мы разсмотрѣли случай, когда одинъ изъ полиномовъ $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ нулевой степени, а другой второй степени, то нашли бы подобнымъ же образомъ выраженіе

$$U(x)=\frac{a_1+a_2}{2}+\frac{a_1-a_2}{2}\cos 2m\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}},$$

*

тогда

$$U(x)-a_1=(a_1-a_2)(x+a)(x+b)\left(\operatorname{cs}(m-1)\operatorname{arccs}\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\operatorname{cs}(m-3)\operatorname{arccs}\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\right)^2$$

и
$$U(x)-a_2=(a_1-a_2)\left(\cos m\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)^2.$$

Изъ сказаннаго заключаемъ, что гиперэллиптическій интегралъ какого угодно класса

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)\left(A+B\operatorname{cs}n\operatorname{arccos}\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}$$

приводится къ эллиптическому.

Для приведенія можно положить

$$y=\cos n\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}.$$

Вмѣстѣ съ тѣмъ имѣемъ выраженія въ логариѳмахъ для интеграловъ:

$$\int\frac{p_1dx}{\sqrt{(x+b)\left(A+B\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}=$$

$$\frac{1}{2m+1}\lg\frac{p_2\sqrt{(x+b)}+\sqrt{\left(A+B\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}{p_2\sqrt{(x+b)}-\sqrt{\left(A+B\cos(2m+1)\arccos\frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}},$$

$$\int \frac{\cos m \arccos \dfrac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\, dx}{\sqrt{(x+a)(x+b)\left(A+B\cos 2m\arccos \dfrac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}=$$

$$\frac{1}{2m}\lg \frac{P\sqrt{(x+a)(x+b)}+\sqrt{\left(A+B\cos 2\, m\arccos \dfrac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}{P\sqrt{(x+a)(x+b)}-\sqrt{\left(A+B\cos 2\, m\arccos \dfrac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right)}}$$

$$\left[\text{здѣсь } P=\cos(m-1)\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\cos(m-3)\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}+\ldots\right]$$

и др.

Послѣднія разсужденія даютъ возможность доказать слѣдующую теорему.

Теорема. Если гиперэллиптическій интегралъ перваго класса

$$\int \frac{\lambda dx}{\sqrt{R(x)}},$$

гдѣ $R(x)$ полиномъ 5-й степени, приводится къ эллиптическому преобразованіемъ

$$y = \text{цѣлой функціи } x,$$

то *необходимо* должно быть

$$R(x)=(x+a)(x+b)\left(A+B\cos 3\arccos \frac{x+\frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}}\right),$$

Для доказательства замѣтимъ сначала, что данный интегралъ не можетъ приводиться къ такому эллиптическому

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y-a_1)(y-a_2)(y-a_3)(y-a_4)}},$$

такъ какъ, полагая

$$y - a_1 = p_1^2 \gamma_1 ,$$

$$y - a_2 = p_2^2 \gamma_2 ,$$

$$y - a_3 = p_3^2 \gamma_3 ,$$

$$y - a_4 = p_4^2 \gamma_4 ,$$

мы найдемъ

$$R(x) = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4 ,$$

но произведенiе четырехъ полиномовъ $\gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 \gamma_4$, которыхъ степени одинаковой четности, не можетъ быть полиномомъ 5-й степени.

Слѣдовательно, если данный интегралъ приведется къ эллиптическому, то такому:

$$\int \frac{dy}{\sqrt{(y - a_1)(y - a_2)(y - a_3)}} .$$

Полагая опять

$$y - a_1 = p_1^2 \gamma_1 ,$$

$$y - a_2 = p_2^2 \gamma_2 ,$$

$$y - a_3 = p_3^2 \gamma_3 ,$$

мы будемъ имѣть

$$R(x) = \gamma_1 \gamma_2 \gamma_3 .$$

Значитъ полиномы γ_1, γ_2, γ_3 должны быть нечетныхъ степеней, а такъ какъ сумма этихъ степеней равняется 5, то, очевидно, одинъ изъ этихъ полиномовъ будетъ 3-й степени, а остальныя два первой степени.

Пусть

$$\gamma_1 = x + a ,$$

$$\gamma_2 = x + b ,$$

тогда, на основанiи сказаннаго въ этомъ n^0, заключаемъ

$$y = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos(2m + 1) \arccos \frac{x + \frac{a + b}{2}}{\frac{b - a}{2}} ,$$

а такъ какъ p_3 въ этомъ случаѣ не зависитъ отъ x (p_1, p_2 и p_3 дѣлители полинома $2m$-й степени y'), то y должно быть 3-й степени, ибо γ_3, какъ сказано выше, есть полиномъ 3-й степени.

Слѣдовательно,

$$y = \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1 - a_2}{2} \cos 3 \arccos \frac{x + \frac{a+b}{2}}{\frac{b-a}{2}},$$

а это и доказываетъ теорему.

И такъ, изъ гиперэллиптическихъ интеграловъ перваго класса

$$\int \frac{(kx+1)\,dx}{\sqrt{(mx^5 + nx^4 + px^3 + qx^2 + rx + s)}},$$

преобразованіемъ

$$y = \text{цѣлому полиному } x,$$

къ эллиптическому приводится только одинъ

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + 2xm + n)(x^3 + 3mx^2 + \frac{3}{4}(3m^2 + n)\,x + c)}}.$$

(Здѣсь мы обозначили $a + b$ чрезъ $2m$, ab чрезъ n).

Для приведенія можно положить

$$y = x^3 + 3mx^2 + \tfrac{3}{4}(3m^2 + n)x.$$

Въ частномъ случаѣ, когда $m = 0$, мы получаемъ интегралъ Эрмита

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 + n)(x^2 + \frac{3}{4}nx + c)}},$$

о которомъ мы уже упоминали.

Подобная теорема не имѣетъ мѣста для гиперэллиптическихъ интеграловъ второго, третьяго и т. д. классовъ.

Пермь.
Ноябрь 1887 г.